Contrôle Continu 26/10/22

Durée : 2h
Documents, téléphones portables et appareils électroniques interdits
La redaction et la clarté de l'argumentation sera prise en compte dans la notation

---

Exercice 1 (Autour du cours) Soit A un anneau intègre.

1. Montrer que $P \in A[X] \setminus \{0\}$ possède au plus $\deg(P)$ racines distinctes dans A.
2. Si $P \in A[X]$ est irréductible et $\deg(P) \geq 2$, montrer que P ne possède pas de racines dans A.
3. On suppose $\deg(P) \in \{2, 3\}$. Pour chacune des hypothèses ci-dessous, la réciproque de 2. est-elle vérifiée ?

   (a) A est factoriel (b) A est un corps

Exercice 2 (Fonction polynomiale) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale. On suppose que f est nulle sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ (pour la topologie induite par la norme euclidienne). Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 3 (Discriminant d'un polynôme) Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire de degré n. Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ses racines dans $\mathbb{C}$, et $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ les racines de P' dans $\mathbb{C}$. Rappelons que le discriminant de P est $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$.

1. Si $\delta = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)$, montrer que $\Delta = (-1)^{n(n-1)/2} \delta$.
2. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, établir $P'(\alpha_i) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (\alpha_i - \alpha_j)$.
3. En déduire $\Delta = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} P'(\alpha_i)$.
4. Montrer que $P'(\alpha_i) = n \prod_{j=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_j)$ et en déduire $\Delta = (-1)^{n(n-1)/2} n^n \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n-1}} (\alpha_i - \beta_j)$.
5. Établir
$$\Delta = (-1)^{n(n-1)/2} n^n \prod_{j=1}^{n-1} P(\beta_j).$$
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le discriminant du polynôme $X^n - 1$.

Exercice 4 (Étude d'un anneau) Considérons l'anneau $A = \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - X^3)$. On notera $x, y \in A$ les classes de X et Y.

1. Montrer que $Y^2 - X^3$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X, Y]$. En déduire que A est intègre.
2. Justifier rigoureusement l'existence d'un morphisme $f : A \to \mathbb{C}[T]$ envoyant x sur T^2, y sur T^3, et qui est l'identité sur $\mathbb{C}$.
3. Montrer que f est injectif (on pourra effectuer une division euclidienne par $Y^2 - X^3$ dans $\mathbb{C}[X][Y]$).
   On identifiera par la suite A avec un sous-anneau de $\mathbb{C}[T]$ et $\mathrm{Fr}(A)$ avec un sous-anneau de $\mathbb{C}(T)$.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \{P \in \mathbb{C}[T] ; P'(0) = 0\}$ (on pourra montrer que $T \notin \mathrm{Im}(f)$).
5. Après avoir vérifié que $T \in \mathrm{Fr}(A)$, montrer que $\mathrm{Fr}(A) = \mathbb{C}(T)$.
6. Montrer que $T \in \mathrm{Fr}(A)$ est entier sur A (*i.e.* il existe un polynôme unitaire $Q \in A[Z]$ tel que $Q(T) = 0$).
7. En déduire que A n'est pas factoriel (on pourra utiliser un exercice du TD).